7° Μάθημα: 19/11/2020

Παραδείγματα Τελεστών:

1. Ερμιτιανοί (hermitian) τελεστές: $A^+ = A$
   συμβολίζουμε H
2. Αντι-Ερμιτιανός (anti-hermitian) τελεστές $A^+ = -A$
3. Μοναδιακό (unitary) τελεστές: $A^+ = A^{-1}$
   συμβολίζαμε με U

Ειδικότερα $\langle Ug | Uf \rangle = \langle g | U^+ U | f \rangle =$
$= \langle g | U^{-1} U | f \rangle = \langle g | f \rangle$

Διατηρούν τα μήκη των διανυσμάτων καλούνται ισομετρικοί.

4. Κανονικός τελεστής: $AA^+ = A^+A$ ή $[A, A^+] = 0$

άσκηση: Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω τελεστές είναι κανονικοί

5. Προβολικός τελεστής συμβολίζαμε P
   α. είναι self-adjant (αυτο-προσαρτημένος)
   β. $P^2 = P$

Θεώρημα: Αν A είναι κανονικός τελεστής κι $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε $A|f\rangle = \lambda|f\rangle \Rightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$. Δηλ. ο A^+ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A αλλά συζυγείς ιδιοτιμές

Αποδ: Ορίζουμε τον τελεστή $C = A - \lambda I$, I μοναδιαίος τελεστής τότε $C^+ = (A - \lambda I)^+ = A^+ - (\lambda I)^+ = A^+ - \lambda^* I$
Οι τελεστές C είναι κανονικός αν και ο A είναι κανονικός.

$$CC^{+}|f\rangle = C\underbrace{\left(A^{+}|f\rangle - \lambda^{*}|f\rangle\right)}_{C^{+}|f\rangle} = AA^{+}|f\rangle - \lambda^{*}A|f\rangle - \lambda A^{+}|f\rangle + |\lambda|^{2}|f\rangle$$

$$CC^{+}|f\rangle = (A-\lambda I)(A^{+}-\lambda^{*}I)|f\rangle$$

$$C^{+}C|f\rangle = C^{+}\left(A|f\rangle - \lambda|f\rangle\right) = A^{+}A|f\rangle - \lambda A^{+}|f\rangle - \lambda^{*}A|f\rangle + |\lambda|^{2}|f\rangle =$$

$$= AA^{+}|f\rangle - \lambda A^{+}|f\rangle - \lambda^{*}A|f\rangle + |\lambda|^{2}|f\rangle = CC^{+}|f\rangle$$

Δηλ. $C^{+}C = CC^{+}$ και ο C είναι κανονικός τελεστής

όμως $C|f\rangle = 0 \Rightarrow \langle Cf|Cf\rangle = 0$

$$\langle Cf|Cf\rangle = \langle f|C^{+}C^{+}|f\rangle = \langle f|(CC)^{+}|f\rangle =$$

$$= \langle f|CC|f\rangle^{*} = \langle C^{+}f|C^{+}f\rangle^{*} = \langle C^{+}f|C^{+}f\rangle = 0$$

$$\Rightarrow C^{+}|f\rangle = 0 \Rightarrow A^{+}|f\rangle = \lambda^{*}|f\rangle$$

$$\langle Cg|Cf\rangle = \langle g|C^{+}C^{+}|f\rangle = \langle g|(CC)^{+}|f\rangle = \langle f|CC|g\rangle^{*} = \langle C^{+}f|C^{+}g\rangle^{*} = \langle C^{+}g|C^{+}f\rangle$$

$$\langle g|A|f\rangle = \langle f|A^{+}|g\rangle^{*}$$

Ιδιότητες:

α. Αν H ερμιτιανός τελεστής τότε έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Αποδ:

Ο H είναι ερμιτιανός (άρα κ κανονικός) Αντίστοιχα

$$\begin{cases} H|f\rangle = \lambda|f\rangle \\ H^{+}|f\rangle = \lambda^{*}|f\rangle \end{cases} \Rightarrow H^{+}|f\rangle = H|f\rangle = \lambda|f\rangle = \lambda^{*}|f\rangle$$

$H^{+} = H$ $\Rightarrow \lambda = \lambda^{*}$ άρα $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Αν ο τελεστής είναι αντι-ερμιτιανός οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές (άσκηση)

γ. Αν U μοναδιακός τελεστής τότε έχει ιδιοτιμές με μέτρο μονάδα

Αποδειξη:

$$\begin{cases} U|f\rangle = \lambda|f\rangle \\ U^{+}|f\rangle = \lambda^{*}|f\rangle \Rightarrow U^{-1}|f\rangle = \lambda^{*}|f\rangle \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f\rangle = \lambda^{*}U|f\rangle = \lambda^{*}\lambda|f\rangle = |\lambda|^{2}|f\rangle$$

$$\Rightarrow |\lambda|^{2} = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

Θεώρημα: Τα ιδιοδιανύσματα ενός κανονικού τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

Απόδειξη:

Έστω A ένας κανονικός τελεστής και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ δύο ιδιοτιμές του, τότε:

$$\begin{cases} A|f_1\rangle = \lambda_1|f_1\rangle \\ A|f_2\rangle = \lambda_2|f_2\rangle \end{cases} \quad \text{και} \quad AA^{+} = A^{+}A$$

Από προηγούμενο θεώρημα: $A|f\rangle = \lambda|f\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{+}|f\rangle = \lambda^{*}|f\rangle$

Ζητάω να δείξω $\langle f_2|f_1 = \langle f_2|f_1\rangle = 0$

$\langle f_2|A|f_1\rangle = \langle f_2|\lambda_1|f_1\rangle = \lambda_1\langle f_2|f_1\rangle$

$\langle f_1|A|f_2\rangle = \langle f_1|\lambda_2|f_2\rangle = \lambda_2\langle f_1|f_2\rangle$

$$\langle f_1|A|f_2\rangle = \langle f_2|A^{+}|f_1\rangle^{*} = (\lambda_1^{*})^{*}\langle f_2|f_1\rangle^{*} =$$

$$= \lambda_1\langle f_1|f_2\rangle$$

$\parallel$

$\lambda_2\langle f_1|f_2\rangle$

ή $\lambda_2\langle f_1|f_2\rangle = \lambda_1\langle f_1|f_2\rangle$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Rightarrow \langle f_1|f_2\rangle = 0$

Άσκηση:

Να εξετάσετε αν ο $A = \int_0^x dt$ είναι αυτοπροσαρτημένος. (self-adjoint)

Λύση:

Ζητάμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle g|A^{+}|f\rangle = \langle Ag|f\rangle = \int_a^b \left(\int_0^x g(t)dt\right)^{*} f(x)\,dx.$$

$$A|g\rangle = \int_0^x g(t)dt = G(x) \quad (\text{αρχική της } g)$$

$$\langle g|A^{+}|f\rangle = \int_a^b G^*(x) f(x)\,dx$$

$$\langle g|A|f\rangle = \int_a^b g^*(x)\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)dx = \int_a^b g^*(x)F(x)\,dx$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b G^*(x) f(x)\,dx = \int_a^b G^*(x)\,F'(x)\,dx =$$

$$= \left[G^* F\right]_a^b - \int_a^b G'^*(x) F(x)\,dx = G^*(b)\cdot F(b) - G^*(a)F(a) -$$

$$- \int_a^b g^*(x) F(x)\,dx.$$

Αν $G^*(b)F(b) = G(a)\cdot F(a)$ έχω $A^{+} = -\int_a^x dt$

$$\Rightarrow = \int_a^b g^*\left(-\int_a^x f(t)\,dt\right)dx$$

Ασκηση:

Δίνονται οι τελεστές K και S ώστε $K = e^{iS}$

a. Να δείξετε ότι αν $S = S^{+}$ τότε $K^{+} = K^{-1}$

b. Αν $S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ να βρεθεί ο K

c. Αν $K^{+} = K^{-1}$ ισχύει $S^{+} = S$? (αντίστροφο του a)

Λύση:

a. Αν $K = e^{iS}$ τότε $e^{iS}\cdot e^{-iS} = I = e^{-iS}\cdot e^{iS}$ κ $K^{-1} = e^{-iS}$

$K = e^{iS} \Rightarrow K^{+} = e^{-iS^{+}} = e^{-iS} = K^{-1}$

β. $S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ και $S^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ i & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$S^2 = I$

$S^3 = S^2 S = S$ $\qquad S^{2k+1} = S$

$S^4 = S^2 S^2 = I$ $\qquad S^{2k} = I$

$S^5 = S$

$$e^{iS}=\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})e^2}{2e} & i\,\frac{e^2-1}{2e} \\ i\,\frac{e^2-1}{2e} & \frac{1+\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})e^2}{2e} \end{pmatrix}$$

c. ασκηση.

$$A=\begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} \qquad e^A=?$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

$$i^n=\begin{cases} i \\ -i \\ 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$e^{iS}=\sum\frac{(iS)^n}{n!}$$

Απόλυτα Συνεχεις Τελεστες:

Ορισμος: Εστω ενας γραμμικος διαν. χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε ένας τελεστής που δρα στον χώρο αυτό ειναι πληρως ή απόλυτα συνεχής αν μετασχηματίζει μια φραγμένη ακολουθια διανυσμάτων σε μια ακολουθία που περιέχει μια συγκλίνουσα υποκολουθία

Θεώρημα: Έστω A τελεστής που δρα σε χώρο Hilbert, self-adjoint κ' πληρως/απόλυτα συνεχής τοτε:

a. Οι ιδιοτιμές του τελεστή ειναι πραγματικές

b. ∃ τουλάχιστον μια μη-μηδενική ιδιοτιμή

c. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια μη-μηδενική ιδιοτιμή είναι πεπερασμένα το πλήθος. Αν είναι περισσότερα από ένα λέγονται εκφυλισμένα

d. Τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή αποτελούν βάση του χώρου Hilbert.